

具阻尼项的高阶中立型泛函微分方程的振荡性*

杨甲山

(梧州学院数理系, 广西 梧州 543002)

摘要: 研究了一类具有阻尼项的偶数阶非线性变时滞中立型泛函微分方程的振荡性, 借助于 Hölder 不等式及一些分析技巧, 利用 Riccati 变换和 H 函数的方法, 获得了该类方程振荡的一些新的判别准则, 所得结论推广并改进了现有文献中的一些结果。并以具体例子说明了所得结果的重要性。

关键词: 振荡性; 阻尼项; 泛函微分方程; Riccati 变换

中图分类号: O175.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2014) 03-0067-06

Oscillation of Higher Order Neutral Functional Differential Equations with Damping

YANG Jiashan

(Department of Mathematics and Physics, Wuzhou University, Wuzhou 543002, China)

Abstract: The oscillation for a class of even order nonlinear variable delay neutral functional differential equation with damping is discussed. By using the generalized Riccati transformation and the method of H function, and Hölder inequality and some necessary analytic techniques, some new criteria for the oscillation of the equation are proposed. These criteria improve and generalize some corresponding known results. Some examples are given to illustrate the importance of the results.

Key words: oscillation; damped term; functional differential equation; Riccati transformation

考虑如下一类高阶非线性变时滞阻尼泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}[A(t)\varphi(z^{(n-1)}(t))] + b(t)\varphi(z^{(n-1)}(t)) + Q(t)f(\varphi(x(\delta(t)))) = 0, t \geq t_0 \quad (1)$$

其中 $n \geq 2$ 为偶数, $t_0 \geq 0$ 为常数, $z(t) = x(t) + P(t)x(\tau(t))$, $A(t), P(t), Q(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R})$, $\varphi(u) = |u|^{\gamma-1}u$, $\gamma > 0$ 为常数; $f(u) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 且 $uf(u) > 0 (u \neq 0)$ 。本文总假设下列条件成立:

- (H₁) $\tau(t) \in C([t_0, +\infty), (0, +\infty)), \tau(t) \leq t, \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = +\infty$ 。
- (H₂) $\delta(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty)), \delta(t)$

$$\leq t, \lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) = +\infty, \delta'(t) > 0$$

(H₃) 存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $\frac{f(u)}{u} \geq \alpha (u \neq 0)$ 。

(H₄) $A(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$ 且 $A'(t) > 0; 0 \leq P(t) < 1; Q(t) > 0$ 。

$$(H_5) \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{A(u)} \exp\left(-\int_{t_0}^u \frac{b(s)}{A(s)} ds\right) \right]^{1/\gamma} du = +\infty$$

我们称函数 $x(t) \in C^{n-1}([T_x, +\infty), \mathbf{R}) (T_x \geq t_0)$ 为方程 (1) 的一个解, 如果 $A(t)\varphi(z^{(n-1)}(t)) \in C^1([T_x, +\infty), \mathbf{R})$ 且在区间 $[T_x, +\infty)$ 上满足方程 (1)。方程 (1) 的一个非平凡解 $x(t)$ 称为是振荡的, 如果它有任意大的零点, 否则称它是非振荡的。方程 (1) 称为是振荡的, 如果它的所有

* 收稿日期: 2013-09-13

基金项目: 湖南省科技厅基金资助项目 (2012FJ3107); 湖南省教育厅科研重点资助项目 (09A082); 广西教育厅科研资助项目 (2013YB223)

作者简介: 杨甲山 (1963年生), 男; 研究方向: 微分差分方程及动力方程; E-mail: syxyyjs@163.com

解都是振荡的。

关于方程 (1) 的特殊情形及其振荡性结果见文 [1-4]。若方程 (1) 中 $P(t) \equiv 0, f(u) = u$, 则可简化为

$$[A(t)\varphi(x^{(n-1)}(t))] + b(t)\varphi(x^{(n-1)}(t)) + Q(t)\varphi(x(\delta(t))) = 0 \quad (2)$$

而方程 (2) 的振荡性在文 [5] 也作了仔细研究, 并给出了 3 个非常有价值的振荡准则。本文的目的是研究方程 (1) 振荡性, 并给出当文 [5] 中定理 3 的条件 (C_0) (文 [6-16] 也有类似的条件) 不成立时的一些新的振荡准则。

1 几个引理

引理 1^[6] 设 u 在 $[t_0, +\infty)$ 上是正的 n 次可微函数, $u^{(n)}(t)$ 最终定号, 则存在 $t^* \geq t_0$ 和整数 $l(0 \leq l \leq n)$, 当 $u^{(n)}(t) \geq 0$ 时, $n+l$ 为偶数; 当 $u^{(n)}(t) \leq 0$ 时, $n+l$ 为奇数, 使得

当 $l > 0$ 时, 有 $u^{(k)}(t) > 0, t \geq t^*, k = 0, 1, \dots, l-1$;

且当 $l \leq n-1$ 时, 有 $(-1)^{l+k}u^{(k)}(t) > 0, t \geq t^*, k = l, l+1, \dots, n-1$

引理 2^[7] 设 u 满足引理 1 的条件, 且 $u^{(n-1)}(t)u^{(n)}(t) \leq 0(t \geq t^*)$, 则对任何 $\theta \in (0, 1)$, 存在常数 $M > 0$, 使得对一切充分大的 t 有 $u'(\theta t) \geq Mt^{n-2}u^{(n-1)}(t)$ 。

引理 3^[8] 设 a, b 为非负实数, 则 $\lambda ab^{\lambda-1} - a^\lambda \leq (\lambda-1)b^\lambda, \lambda > 1$, 等号成立当且仅当 $a = b$ 。

引理 4 设 $x(t)$ 是方程 (1) 的最终正解, 则 $z(t) > 0, z'(t) > 0, z^{(n-1)}(t) > 0, z^{(n)}(t) \leq 0$ 。

证明完全类似于文 [5] 中的引理 4, 在此从略。

2 主要结果和证明

为了叙述方便, 考虑集合 $D = \{(t, s) \mid t \geq s \geq t_0\}, D_0 = \{(t, s) \mid t > s \geq t_0\}$ 。称函数 $H \in Y$, 如果函数 $H(t, s) \in C(D, R)$, 当 $t \geq t_0$ 时 $H(t, t) = 0$; 当 $(t, s) \in D_0$ 时 $H(t, s) > 0$ 且 $H(t, s)$ 对第二个变量有连续非正的偏导数。

引入记号

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \alpha Q(s)[1 - P(\delta(s))]^\gamma, \\ \psi(s) &= \frac{(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)}A(s)}{[\theta M \delta^{n-2}(s)\delta'(s)]^\gamma} \end{aligned} \quad (3)$$

定理 1 若存在函数 $H \in Y$ 及 $\zeta(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \zeta(s) \cdot \left\{ H(t, s)\Phi(s) - \frac{\psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{[H(t, s)]^\gamma} \right\} ds = +\infty \quad (4)$$

其中 $h(t, s) = H(t, s) \left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} \right] + \frac{\partial H(t, s)}{\partial s}$, $\Phi(s)$ 及 $\psi(s)$ 定义如式 (3), 常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2。则方程 (1) 是振荡的。

证明 设方程 (1) 存在非振荡解 $x(t)$ 。不失一般性, 设 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, x(\delta(t)) > 0, t \geq T \geq t_0$ 。由方程 (1) 并注意到条件 (H_3) , 得

$$[A(t)\varphi(z^{(n-1)}(t))] + b(t)\varphi(z^{(n-1)}(t)) \leq -\alpha Q(t)\varphi(x(\delta(t))) < 0 \quad (5)$$

由引理 2, 对 $0 < \theta < 1$, 存在常数 $M > 0$, 有

$$z'(\theta\delta(t)) \geq M\delta^{n-2}(t)z^{(n-1)}(\delta(t)) \geq M\delta^{n-2}(t)z^{(n-1)}(t) \quad (6)$$

由 $x(t) \leq z(t)$ 及引理 4 知, $z(t) \leq x(t) + P(t)z(\tau(t)) \leq x(t) + P(t)z(t)$, 即

$$x(t) \geq [1 - P(t)]z(t) \geq 0 \quad (7)$$

定义函数

$$\begin{aligned} V(t) &= \zeta(t) \frac{A(t)\varphi(z^{(n-1)}(t))}{\varphi(z(\theta\delta(t)))} = \\ &\zeta(t) \frac{A(t)[z^{(n-1)}(t)]^\gamma}{[z(\theta\delta(t))]^\gamma}, t \geq T \end{aligned} \quad (8)$$

则 $V(t) > 0 (t \geq T)$, 注意到式 (5) - (7), 可以得到

$$\begin{aligned} V'(t) &= \zeta'(t) \frac{A(t)\varphi(z^{(n-1)}(t))}{\varphi(z(\theta\delta(t)))} + \\ &\zeta(t) \frac{[A(t)\varphi(z^{(n-1)}(t))]'}{\varphi(z(\theta\delta(t)))} - \\ &\zeta(t) \frac{A(t)[z^{(n-1)}(t)]^\gamma}{[z(\theta\delta(t))]^{\gamma+1}} \gamma \theta z'(\theta\delta(t)) \delta'(t) \leq \\ &\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} V(t) - \zeta(t) \frac{b(t)\varphi(z^{(n-1)}(t)) + \alpha Q(t)\varphi(x(\delta(t)))}{\varphi(z(\theta\delta(t)))} - \\ &\zeta(t) A(t) \frac{[z^{(n-1)}(t)]^{\gamma+1}}{[z(\theta\delta(t))]^{\gamma+1}} \gamma \theta M \delta^{n-2}(t) \delta'(t) \leq \\ &\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} V(t) - \frac{b(t)}{A(t)} V(t) - \zeta(t) \alpha Q(t) [1 - P(\delta(t))]^\gamma - \\ &\gamma \theta M \delta^{n-2}(t) \delta'(t) [\zeta(t) A(t)]^{\frac{1}{\gamma}} [V(t)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}, \end{aligned}$$

注意到式 (3) 的第一个式子, 于是由上式, 当 $t \geq T$ 时, 有

$$\begin{aligned} \zeta(t)\Phi(t) &\leq -V'(t) + \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} - \frac{b(t)}{A(t)} \right] V(t) - \\ &\gamma \theta M \delta^{n-2}(t) \delta'(t) [\zeta(t) A(t)]^{\frac{1}{\gamma}} [V(t)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \end{aligned}$$

上式两边同乘 $H(t,s)$ ，并从 T 到 $t (t \geq T)$ 积分，可得

$$\begin{aligned} \int_T^t H(t,s)\zeta(s)\Phi(s)ds &\leq - \int_T^t H(t,s)V'(s)ds + \\ &\int_T^t H(t,s)\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{b(s)}{A(s)}\right]V(s)ds - \\ &\int_T^t H(t,s)\gamma\theta M\delta^{n-2}(s)\delta'(s) \cdot \\ &[\zeta(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds = \\ H(t,t_0)V(T) &+ \int_T^t h(t,s)V(s)ds - \\ \int_T^t H(t,s)\gamma\theta M\delta^{n-2}(s)\delta'(s) \cdot \\ &[\zeta(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds \end{aligned} \quad (9)$$

现取

$$\lambda = \frac{\gamma + 1}{\gamma},$$

$$\begin{aligned} a &= [H(t,s)\gamma\theta M\delta^{n-2}(s)\delta'(s)]^{\frac{-1}{\gamma+1}}[\zeta(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma+1}}V(s), \\ b &= \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1}\right)^\gamma [H(t,s)\gamma\theta M\delta^{n-2}(s)\delta'(s)]^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} \cdot \end{aligned}$$

$$[\zeta(s)A(s)]^{\frac{-\gamma}{\gamma+1}} |h(t,s)|^\gamma$$

代入引理 3 中的不等式，得

$$|h(t,s)|V(s) -$$

$$\begin{aligned} H(t,s)\gamma\theta M\delta^{n-2}(s)\delta'(s)[\zeta(s)A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}}[V(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} &\leq \\ \frac{\zeta(s)\psi(s)|h(t,s)|^{\gamma+1}}{[H(t,s)]^\gamma} \end{aligned} \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (9)，有

$$\begin{aligned} \int_T^t H(t,s)\zeta(s)\Phi(s)ds &\leq H(t,t_0)V(T) + \\ \int_T^t \frac{\zeta(s)\psi(s)|h(t,s)|^{\gamma+1}}{[H(t,s)]^\gamma} ds \end{aligned} \quad (11)$$

即

$$\begin{aligned} \int_T^t \zeta(s)\left\{H(t,s)\Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t,s)|^{\gamma+1}}{[H(t,s)]^\gamma}\right\} ds &\leq \\ H(t,t_0)V(T) \end{aligned} \quad (12)$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_0^t \zeta(s)\left\{H(t,s)\Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t,s)|^{\gamma+1}}{[H(t,s)]^\gamma}\right\} ds &= \\ \frac{1}{H(t,t_0)} \left\{ \int_0^T \zeta(s)\left\{H(t,s)\Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t,s)|^{\gamma+1}}{[H(t,s)]^\gamma}\right\} ds + \right. \\ \left. \int_T^t \zeta(s)\left\{H(t,s)\Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t,s)|^{\gamma+1}}{[H(t,s)]^\gamma}\right\} ds \right\} &\leq \\ \int_0^T \zeta(s)\Phi(s)ds + V(T) = C + V(T) \end{aligned}$$

其中 $\int_0^T \zeta(s)\Phi(s)ds = C$ 为常数。上式两边取上极限，得与式 (4) 矛盾！定理证毕。

注 1 通过选择恰当的不同的函数 $H(t,s)$ 和 $\zeta(s)$ 就能导出许多关于方程 (1) 及其特殊情形的不同类型的其它具体振荡准则。如，若方程 (1) 中 $n = 2, P(t) \equiv 0, f(u) = u, \delta(t) = t$ ，并在定理 1 中取 $\zeta(s) = 1$ ，于是由定理 1，我们可得如下结果。

推论 1 若存在函数 $H \in Y$ ，使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_0^t \left[H(t,s)Q(s) - \frac{A(s)|h(t,s) + \sqrt{H(t,s)}|^{\gamma+1}b(s)/A(s)}{(\gamma + 1)^{\gamma+1}[H(t,s)]^{(\gamma-1)/2}} \right] ds = +\infty$$

其中 $h(t,s) = \sqrt{H(t,s)}$ 。则方程

$$\begin{aligned} [A(t)|x'(t)|^{\gamma-1}x'(t)]' + b(t)|x'(t)|^{\gamma-1} \cdot \\ x'(t) + Q(t)|x(t)|^{\gamma-1}x(t) = 0 \end{aligned}$$

是振荡的。

这是 Li 等^[9]将 Philos 型振荡准则推广到了二阶半线性阻尼微分方程所得到的结果。本文将其推广到了具有阻尼项的高阶非线性中立型变时滞微分方程 (1)。又如取 $H(t,s) = (t-s)^k$ ，由定理 1，可得如下结果。

推论 2 如果存在常数 $k > \gamma$ 及函数 $\zeta(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$ ，使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_0^t (t-s)^k \zeta(s) \cdot$$

$$\left[\Phi(s) - \Psi(s) \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s} \right|^{\gamma+1} \right] ds = +\infty$$

其中常数 $\theta \in (0,1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2，函数 $\Phi(s), \Psi(s)$ 定义如式 (3)。则方程 (1) 是振荡的。

若方程 (1) 中 $n = 2, P(t) \equiv 0, b(t) \equiv 0, f(u) = u, \delta(t) = t$ ，并在推论 2 中取 $\zeta(t) = 1$ ，则有

推论 3 设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t [A(u)]^{\frac{-1}{\gamma}} du = +\infty$ ，如果存在常数 $k > \gamma$ ，使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_0^t (t-s)^{k-\gamma-1} \cdot$$

$$\left[(t-s)^{\gamma+1}Q(s) - \left(\frac{k}{\gamma + 1}\right)^{\gamma+1} A(s) \right] ds = +\infty$$

则方程 $[A(t)\varphi(x'(t))]' + Q(t)\varphi(x(t)) = 0 (t \geq t_0)$ 是振荡的。

推论 3 就是文 [8] 中的定理 4.7.5，也是 Li 等^[2]推广了 Kamenev 的结果所得到的结论。

若方程 (1) 中 $P(t) \equiv 0, f(u) = u$ ，则定理 1 即为文 [5] 中的定理 3。其它相关结果可参见

文献 [10 - 14] 及其参考文献。若式 (4) 不成立, 我们有下面的判别准则。

定理 2 若存在函数 $H \in Y$ 及 $\zeta(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, $\xi_1(t), \xi_2(t) \in L^2([t_0, +\infty), R)$ 使得对任意的 $s \geq T$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_s^t H(t, \tau) \zeta(\tau) \Phi(\tau) d\tau \geq \xi_1(s) \quad (13)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_s^t \frac{\zeta(\tau) \psi(\tau)}{H^\gamma(t, \tau)} |h(t, \tau)|^{\gamma+1} d\tau \leq \xi_2(s) \quad (14)$$

并且 ξ_1 和 ξ_2 满足

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \cdot \int_T^t \frac{H(t, \tau) \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = +\infty \quad (15)$$

其中 $T \geq t_0$ 为某常数, 常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2, $[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+ = \max\{[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)], 0\}$, 函数 $\Phi(s)$, $\psi(s)$ 及 $h(t, s)$ 定义如定理 1, 则方程 (1) 是振荡的。

证明 设方程 (1) 存在非振荡解 $x(t)$ 。不失一般性, 设 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, x(\delta(t)) > 0, t \geq T \geq t_0$ 。定义函数 $V(t)$ 如式 (8), 则由定理 1 的证明可得式 (9) 和式 (11)。由式 (11), 当 $t \geq s \geq T \geq t_0$ 时, 有

$$\int_s^t H(t, \tau) \zeta(\tau) \Phi(\tau) d\tau \leq H(t, t_0) V(s) + \int_s^t \frac{\zeta(\tau) \psi(\tau)}{H^\gamma(t, \tau)} |h(t, \tau)|^{\gamma+1} d\tau \quad (16)$$

由式 (16), 进一步可得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_s^t H(t, \tau) \zeta(\tau) \Phi(\tau) d\tau \leq$$

$$V(s) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_s^t \frac{\zeta(\tau) \psi(\tau)}{H^\gamma(t, \tau)} |h(t, \tau)|^{\gamma+1} d\tau$$

注意到式 (13)、式 (14), 由上式即得

$$\xi_1(s) - \xi_2(s) \leq V(s), s \geq T \geq t_0 \quad (17)$$

另一方面, 由式 (9), 有

$$\frac{1}{H(t, t_0)} \int_T^t \left\{ \frac{H(t, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} - |h(t, \tau)| V(\tau) \right\} d\tau \leq V(T) - \frac{1}{H(t, t_0)} \int_T^t H(t, \tau) \zeta(\tau) \Phi(\tau) d\tau$$

上式蕴含着

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \cdot \int_T^t \left\{ \frac{H(t, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} - |h(t, \tau)| V(\tau) \right\} d\tau \leq V(T) - \xi_1(T) \leq C_0 \quad (18)$$

式中 C_0 为某常数, 并能断言

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \cdot \int_T^t \frac{H(t, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau < +\infty \quad (19)$$

事实上, 若上式不成立, 则存在序列 $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty} : T_n \in [T, +\infty)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, t_0)} \cdot \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = +\infty$$

于是由式 (18), 知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, t_0)} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau = +\infty \quad (20)$$

所以, 对充分大的正整数 n ,

$$\frac{1}{H(T_n, t_0)} \cdot \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau - \frac{1}{H(T_n, t_0)} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau < C_0 + 1$$

于是, 对充分大的正整数 n 及 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\frac{\int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau}{\int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau} > 1 - \varepsilon > 0 \quad (21)$$

另一方面, 由 Hölder 不等式 $\int_a^b f(x)g(x) dx \leq$

$$\left[\int_a^b (f(x))^p dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b (g(x))^q dx \right]^{1/q} \quad \left(\text{这里 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right), \text{ 并注意到式 (3) 的第二个式子, 可得}$$

$$\int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau = \int_T^{T_n} \frac{|h(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [\zeta(\tau) A(\tau)]^{-1/\gamma} |V(\tau)|^{2/\gamma}}{\{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [\zeta(\tau) A(\tau)]^{-1/\gamma}\}^{2/\gamma}} d\tau \leq \frac{\gamma+1}{\gamma^{2/(\gamma+1)}} \left\{ \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \right\}^{2/\gamma} \cdot \left\{ \int_T^{T_n} \frac{\zeta(\tau) \psi(\tau) |h(T_n, \tau)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(T_n, \tau)} d\tau \right\}^{1/\gamma}$$

由上式并注意到式 (21), 得

$$0 < \frac{(1-\varepsilon)^\gamma}{H(T_n, t_0)} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau < \frac{\left\{ \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau \right\}^{\gamma+1}}{H(T_n, t_0) \left\{ \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \right\}^\gamma} \leq \frac{(\gamma+1)^{\gamma+1}}{\gamma^\gamma H(T_n, t_0)} \int_T^{T_n} \frac{\xi(\tau) \Psi(\tau) |h(T_n, \tau)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(T_n, \tau)} d\tau$$

由式 (14) 知, 上式右边是有界的, 这与式 (20) 矛盾! 所以式 (19) 是成立的。

由式 (19), 并注意到式 (17), 我们有

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, t_0)} \cdot \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, t_0)} \cdot \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\zeta(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau < +\infty$$

这与式 (15) 矛盾! 定理证毕。

适当选取函数 $H(t, s)$ 和 $\zeta(t)$, 就可以从定理 2 得到方程 (1) 的一系列具体振荡准则。例如, 取 $H(t, s) = (t-s)^k, \zeta(t) \equiv 1$, 就有

推论 4 如果存在函数 $\xi_1(t), \xi_2(t) \in L^2([t_0, +\infty), \mathbf{R})$ 及常数 $k > \gamma$ 使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_s^t (t-\tau)^k \Phi(\tau) d\tau \geq \xi_1(s), \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_s^t (t-\tau)^k \Psi(\tau) \cdot \left(\frac{b(\tau)}{A(\tau)} + \frac{k}{t-\tau} \right)^{\gamma+1} d\tau \leq \xi_2(s)$$

并且 ξ_1 和 ξ_2 满足 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k}$ 。

$\int_T^t \frac{(t-\tau)^k \delta^{n-2}(\tau) \delta'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = +\infty$, 其中 $T \geq t_0$ 为某常数, $[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+ = \max\{[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)], 0\}$, $\Phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 定义如式 (3)。则方程 (1) 是振荡的。

注 2 若方程 (1) 中 $P(t) \equiv 0, f(u) = u$, 则本文定理 2 及推论 4 得到了文 [5] 中定理 3 的条件 (C_9) 不成立时方程 (2) 的振荡准则。

3 例子

例 1 若方程 (1) 中 $n = 4, t_0 = 1, \gamma = 2$,

$$A(t) = t^{\frac{1}{2}}, b(t) = t^{-\frac{5}{2}}, \tau(t) = \delta(t) = \frac{t}{2}, P(t)$$

$$= \frac{1}{2}, Q(t) = \frac{1}{t}, f(u) = u[4 + \ln^\gamma(1 + u^2)], \text{ 则}$$

$$\frac{f(u)}{u} = 4 + \ln^\gamma(1 + u^2) \geq 4 = \alpha \quad (u \neq 0),$$

$$\int_0^t \left[\frac{1}{A(u)} \exp\left(-\int_0^u \frac{b(s)}{A(s)} ds\right) \right]^{1/\gamma} du =$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} \int_1^t u^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{1}{2}u^{-1}\right) du \geq$$

$$e^{-\frac{1}{2}t} \int_1^t u^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{4}u^{-1}\right) du \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow +\infty)$$

显然条件 $(H_1) - (H_5)$ 是满足的。现取 $\zeta(t) = 1, H(t, s) = (t-s)^3$, 则此时定理 1 即为推论 2, 故有

$$\frac{1}{t^k} \int_0^t (t-s)^k \zeta(s) \cdot$$

$$\left[\Phi(s) - \Psi(s) \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s} \right|^{\gamma+1} \right] ds = \frac{1}{t^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{3t}{2} + 3t^2 + \frac{t^3}{6}(6\ln t - 11) - \frac{3^{-3}}{2^{-6}(\theta M)^2} \cdot \left(\frac{1888}{385} + \frac{456t}{143} + \frac{64t^2}{65} + \frac{2t^3}{17} + \frac{32t^{-11/2}}{12155} - \frac{16t^{-9/2}}{143} + \frac{12t^{-7/2}}{7} - \frac{54}{5}t^{-5/2} \right) \right] \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow +\infty)$$

因此推论 2 的条件全部满足, 于是由推论 2 知此时方程是振荡的。

例 2 若方程 (1) 中 $n = 2, t_0 = 1, \gamma = 1$,

$$A(t) = t^{\frac{2}{5}}, b(t) = t^{-\frac{13}{5}}, \tau(t) = \delta(t) = \frac{t}{2}, P(t)$$

$$= \frac{3}{4}, Q(t) = \frac{1}{t^{11/10}}, f(u) = u[4 + \ln^\gamma(1 + u^2)],$$

类似地, 容易验证条件 $(H_1) - (H_5)$ 是满足的。现取 $\zeta(t) = 1, H(t, s) = (t-s)^2$, 注意到当 $n = 2$ 时 $M = \theta = 1$, 所以

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_0^t (t-s)^k \zeta(s) \cdot$$

$$\left[\Phi(s) - \Psi(s) \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s} \right|^{\gamma+1} \right] ds =$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \left(\frac{41945}{10374} + \frac{125t^{-13/5}}{5382} - \frac{25}{12}t^{-\frac{3}{5}} +$$

$$\frac{5}{4}t - \frac{10}{7}t^{\frac{7}{5}} - \frac{2000}{171}t^{\frac{19}{10}} + \frac{455}{46}t^2 \right) = \frac{455}{46} < +\infty$$

即此时式 (4) 是不成立的, 也就是说文 [5] 中定理 3 的条件 (C_9) 不满足, 因此, 文 [5] 中定理 1 - 定理 3 和本文定理 1 及其推论均不能用。现改用本文定理 2 (此时定理 2 即为推论 4), 则

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_s^t (t-\tau)^k \Phi(\tau) d\tau =$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \int_s^t (t - \tau)^2 \frac{1}{\tau^{11/10}} d\tau = \frac{10}{s^{1/10}} = \xi_1(s);$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_s^t (t - \tau)^k \Psi(\tau) \left(\frac{b(\tau)}{A(\tau)} + \frac{k}{t - \tau} \right)^{\gamma+1} d\tau = \frac{5s^{-23/5}}{46} = \xi_2(s)$$

所以

$$\frac{1}{t^k} \int_T^t \frac{(t - \tau)^k \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = \frac{2^{-1}}{t^2} \left(-\frac{20\ 871\ 625}{488\ 796} - \frac{3\ 125t^{-33/5}}{57\ 049\ 476} + \frac{100\ 000}{613\ 893} t^{-\frac{21}{10}} + \frac{1\ 258\ 532\ 875}{8\ 724\ 268} t - \frac{934\ 599\ 875}{3\ 730\ 508} t^2 + \frac{3\ 125}{21} t^{\frac{12}{5}} \right) \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow +\infty)$$

显然, 定理 2 (推论 4) 的条件是满足的。于是, 由定理 2 (推论 4) 知, 此时方程是振荡的。但文 [5-14] 中的定理均不能判定例 1 和例 2 中方程的振荡性。

参考文献:

- [1] KAMENEV I V. An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order [J]. Math Zametki, 1978, 23: 249-251.
- [2] LI H J, YEH C C. An integral criterion for oscillation of nonlinear differential equations [J]. Math Japonica, 1995, 41: 185-188.
- [3] PHILOS CH G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order [J]. Arch Math, 1989, 53: 482-492.
- [4] WANG Q R. Oscillation and asymptotics for second-order half-linear differential equations [J]. Appl Math Comput, 2001, 122: 253-266.
- [5] 张全信, 俞元洪. 偶阶半线性阻尼泛函微分方程的振荡性[J]. 应用数学学报, 2010, 33(4): 601-610.
- [6] AGARWAL R P, GRACE S R, REGAN D O. Oscillation theory for difference and functional differential equations [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [7] GYOR I, LADAS G. Oscillation theory for delay differential equations with applications [M]. Clarendon: Oxford, 1991.
- [8] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and oscillation: Theory for functional differential equations [M]. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [9] LI W T, ZHONG C K, FAN X L. Oscillation criteria for second-order half-linear ordinary differential equations with damping [J]. Rocky Mountain J Math, 2003, 33(1): 1-26.
- [10] YANG X J. Oscillation criteria for nonlinear differential equations with damping [J]. Appl Math Comput, 2003, 136: 549-557.
- [11] WANG Q R. Oscillation criteria for even order nonlinear damped differential equations [J]. Acta Math Hungar, 2002, 95: 169-178.
- [12] WU H W, WANG Q R, XU Y T. Oscillation criteria for certain even order nonlinear functional differential equations [J]. Dynamic Systems and Applications, 2004, 13: 129-144.
- [13] 杨甲山, 方彬. 一类二阶中立型微分方程的振动和非振动准则[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2012, 35(6): 776-780.
- [14] 罗李平, 俞元洪. 三阶半线性中立型微分方程的振动结果[J]. 系统科学与数学, 2012, 32(5): 571-579.
- [15] 杨甲山. 具正负系数和阻尼项的高阶微分方程的振动定理[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(1): 30-34.
- [16] 林全文, 庄容坤. 二阶非线性椭圆型微分方程新的振动准则[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2013, 52(2): 57-61.